

SOMMARIO

CAPITOLO I - NOZIONI DI ALGEBRA DELLE MATRICI

1.- Alcuni richiami di matematica	13
1.1- <i>Simboli</i>	13
1.2- <i>Funzioni</i>	14
1.3- <i>Permutazioni di n elementi distinti</i>	14
2.- Definizioni di vettori e di matrici	16
3.- La matrice dei dati - Le matrici a blocchi	20
4.- Determinante di una matrice quadrata	23
5.- Minore complementare e complemento algebrico di un elemento	25
6.- Teoremi di Laplace	25
7.- Proprietà dei determinanti	27
8.- Calcolo di un determinante - Determinante di Vandermonde	28
9.- Operazioni con vettori e matrici	31
9.1- <i>Addizione di vettori e matrici dello stesso tipo</i>	31
9.2- <i>Moltiplicazione di uno scalare per una matrice</i>	31
9.3- <i>Moltiplicazione di vettori e matrici</i>	32
9.4- <i>Operazioni elementari sulle linee di una matrice</i>	34
9.5- <i>Addizione e moltiplicazione di matrici a blocchi</i>	36
10.- Matrice aggiunta - Matrice inversa	37
11.- Sottomatrice - Minore d'ordine q - Traccia - Caratteristica	40
12.- Vettori paralleli - Vettori ortogonali - Matrice ortogonale - Matrice ortonormale - Matrice idempotente - Matrice non negativa	42
13.- Alcuni teoremi sulle matrici	42
14.- Calcolo di alcune matrici e vettori di largo uso in Statistica	43
14.1- <i>Il vettore di medie</i>	43
14.2- <i>La matrice \mathbf{X} degli scarti dalla media</i>	44
14.3- <i>La matrice \mathbf{T} di devianze-codevianze</i>	45
14.4- <i>La matrice \mathbf{S} di varianze-covarianze</i>	45
14.5- <i>La matrice \mathbf{Z} degli scarti standardizzati</i>	46
14.6- <i>La matrice \mathbf{R} di correlazione</i>	46
15.- Forme lineari - Applicazioni lineari	46
16.- Sistemi lineari	47
16.1- <i>Caso in cui $p = m = n$</i>	49
16.2- <i>Caso in cui $p = m < n$</i>	51
16.3- <i>Caso in cui $p = n < m$</i>	52
16.4- <i>Caso in cui $p < m, p < n$</i>	53
17.- Sistemi lineari omogenei - Nucleo di una matrice	53
18.- Scomposizione della matrice di devianze e codevianze	55
19.- Inversa di una matrice a blocchi	58
20.- Determinante di una matrice a blocchi	61
21.- Dipendenza lineare	63
22.- Spazi e sottospazi vettoriali reali	63
23.- Base e dimensione di uno spazio vettoriale reale	65
24.- Particolari spazi vettoriali reali	65
24.1- <i>Spazi euclidei</i>	65
24.2- <i>Spazi normati</i>	66

24.3- Spazi metrici.....	67
24.3.1- La distanza euclidea	68
24.3.2- La distanza assoluta.....	68
24.3.3- La metrica di Minkowski.....	68
24.3.4- La L - metrica in \mathbb{R}^n - La distanza euclidea generalizzata.....	68
24.3.5- La distanza di Mahalanobis.....	69
24.3.6- La metrica del χ^2 -La distanza del χ^2 tra vettori di frequenze.....	69
25.- Autovalori e autovettori di una matrice quadrata - Matrice modale	73
26.- Alcuni teoremi sugli autovalori e sugli autovettori.....	76
27.- Matrici simili - Matrici diagonalizzabili - Decomposizione spettrale.....	80
28.- Altre proprietà delle matrici quadrate.....	82
29.- Forme quadratiche - Matrici definite e semidefinite positive o negative	83
30.- Forme bilineari	88
31.- La differenziazione con notazione matriciale	88
31.1- Gradiente di una funzione.....	88
31.2- Derivazione di forme lineari	88
31.3- Derivazione di forme quadratiche.....	89
31.4- Derivazione di forme bilineari	90
31.5- Derivata di un determinante	90
31.6- Derivata del prodotto di due matrici	90
31.7- Derivazione di una matrice inversa	90
31.8- Derivata della traccia di una matrice	91
32.- Matrice hessiana	91
33.- Matrice jacobiana	92
34.- Determinazione del segno di una forma quadratica subordinata a vincoli lineari di uguaglianza	92
35.- Matrice inversa generalizzata di Moore-Penrose.....	93
35.1- Caso in cui $p = m = n$	93
35.2- Caso in cui $p = n < m$	93
35.3- Caso in cui $p = m < n$	94
35.4- Caso in cui $p < m, p < n$	94
36.- Soluzione dei sistemi di equazioni lineari in forma generale.....	97
37.- Sistemi di sistemi di equazioni lineari	98
38.- Il prodotto di Kronecker	98
39.- L'operatore Vec	99
40.- Fattorizzazione di una matrice.....	100
41.- Successioni e serie di matrici.....	101
42.- Massimi e minimi relativi e assoluti di funzioni di più variabili	102
43.- Massimi e minimi vincolati nel caso di vincoli di uguaglianza.....	103
43.1- Caso di un solo vincolo.....	103
43.2- Caso di più vincoli	104
44.- I vettori da un punto di vista geometrico.....	106
44.1- Operazioni con i vettori.....	107
44.2- Rappresentazione cartesiana di un vettore.....	108
44.3- Rappresentazione cartesiana della somma di due vettori.....	109
44.4- Prodotto scalare sotto forma cartesiana.....	110
45.- Cenni sulla caratterizzazione delle coniche e delle quadriche	110
45.1 - Coniche	110
45.2 - Quadriche	115

CAPITOLO II - CENNI SULLE VARIABILI CASUALI MULTIDIMENSIONALI - ALCUNE DISTRIBUZIONI MULTIVARIATE

1.- Alcuni richiami sulle v.c. unidimensionali.....	117
2.- Alcuni richiami sulle v.c. bidimensionali.....	119
2.1- <i>Alcune definizioni</i>	119
2.2- <i>Valori attesi e momenti</i>	121
2.3- <i>Valori attesi condizionati</i>	122
2.4- <i>Variabile casuale normale bidimensionale</i>	123
3.- Alcuni richiami sulle variabili casuali multidimensionali	124
3.1- <i>Alcune definizioni</i>	124
3.2- <i>Valori attesi</i>	126
3.3- <i>Valori attesi condizionati</i>	127
4.- Variabile casuale multinomiale.....	129
5.- Variabile casuale normale multivariata.....	130
6.- Alcuni richiami sui campioni casuali univariati e sui principali metodi di stima parametrica	135
7.- Teorema del limite centrale multivariato	138
8.- Campioni casuali multivariati	138
9.- La stima dei parametri della distribuzione multinormale.....	138
10.- La distribuzione di Wishart	140
11.- La distribuzione campionaria del vettore delle medie	141
12.- La distribuzione campionaria di S per campionamento da popolazione multinormale.....	142
13.- La distribuzione asintotica della varianza generalizzata	142
14.- La distribuzione di forme quadratiche di v.c. multinormali.....	142
15.- La distribuzione di Hotelling	143
16.- La distribuzione di Wilks.....	143

CAPITOLO III – VERIFICHE DI IPOTESI MULTIVARIATE

1.- Generalità sulla verifica d'ipotesi statistiche.....	145
2.- Verifica d'ipotesi di multinormalità: il criterio di Malkovich Afifi	145
3.- Applicazione.....	147
4.- Verifica d'ipotesi sul vettore delle medie - Il test T^2 di Hotelling.....	147
5.- Applicazione.....	151
6.- Verifica d'ipotesi di completa indipendenza.....	151
7.- Applicazione.....	153
8.- Verifica d'ipotesi che una matrice di varianze-covarianze sia scalare	153
9.- Verifica d'ipotesi di uguaglianza di matrici di varianze-covarianze	156
10.- Applicazione.....	158
11.- Verifica d'ipotesi d'indipendenza di insiemi di variabili casuali	161
12.- Verifica d'ipotesi di uguaglianza dei vettori medie di due popolazioni multinormali	164
12.1- <i>Matrici di varianze-covarianze uguali</i>	164
12.2- <i>Matrici di varianze-covarianze differenti: il problema di Behrens-Fisher multivariato</i>	165
12.3- <i>Applicazione</i>	167
13.- Verifica d'ipotesi di uguaglianza di due vettori medie di osservazioni appaiate..	168

CAPITOLO IV - MODELLO LINEARE GENERALE

1.- Modello lineare nel caso di regressori fissi.....	171
2.- Stima dei parametri nel caso di regressori fissi.....	173
3.- La misura della forza della relazione di dipendenza.....	175
4.- Alcune proprietà dello stimatore \mathbf{b}	176
5.- Stima di $\sigma^2(\boldsymbol{\varepsilon})$ e $\sigma^2(b_i)$	177
6.- Distribuzione campionaria di $\mathbf{e}'\mathbf{e}$	178
7.- Indipendenza della distribuzione di \mathbf{b} da quella di \mathbf{e}	180
8.- Verifica della significatività della relazione regressiva	181
8.1- <i>Verifica di ipotesi su coefficienti singoli</i>	181
8.2- <i>Verifica di ipotesi sul complesso dei coefficienti</i>	182
8.3- <i>Verifica di ipotesi su un sottoinsieme di coefficienti</i>	184
9.- Intervalli di confidenza per una combinazione lineare dei coefficienti di regressione - Intervalli di confidenza simultanei	185
10.- Multicollinearità	186
11.- Sintesi dei risultati quando \mathbf{X} è fissa.....	187
12.- Requisiti per l'applicabilità del modello nel caso \mathbf{X} sia fissa	189
13.- Esempio	191
14.- Stima nel caso $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma^2\boldsymbol{\Omega}$	198
15.- Modello lineare nel caso di perturbazioni autocorrelate.....	199
16.- Modello lineare nel caso di perturbazioni eteroschedastiche.....	204
17.- L'individuazione di dati anomali.....	209
18.- Errore di specificazione.....	210
19.- Un esempio di funzione linearizzabile: il modello moltiplicativo	212
20.- La correlazione parziale.....	213
21.- La scelta delle variabili.....	216
21.1- <i>Procedura all'indietro (backward elimination)</i>	216
21.2- <i>Procedura in avanti (forward selection)</i>	217
21.3- <i>Procedura passo a passo (stepwise regression)</i>	218
22.- Cenni sulle variabili dummy.....	219
23.- Previsione per mezzo della regressione.....	221
23.1 <i>Caso in cui gli errori sono incorrelati</i>	223
23.2 <i>Caso di autocorrelazione del primo ordine</i>	223
24.- Modello lineare con regressori casuali non affetti da errori di misura.....	224
24.1- \mathbf{X} ed $\boldsymbol{\varepsilon}$ non sono correlati	224
24.2- \mathbf{X} ed $\boldsymbol{\varepsilon}$ sono correlati	225
25.- Applicazione.....	226
26.- Modello lineare con regressori casuali affetti da errori di misura.....	230
27.- Regressione multipla multivariata	230
27.1- <i>Il caso di covarianze σ_{ij} tutte nulle</i>	232
27.2- <i>Il caso di regressori uguali per tutte le equazioni</i>	233
27.3- <i>Stima di $\boldsymbol{\Sigma}$</i>	233
28.- Applicazione.....	234
29.- Vincoli lineari sui coefficienti di regressione	237
29.1- <i>Vincoli sui coefficienti di una sola equazione di regressione</i>	238
29.2- <i>Vincoli sui coefficienti di un sistema di equazioni di regressione</i>	241

30.- Intervalli di confidenza simultanei e verifica d'ipotesi per i coefficienti di regressione lineare multipla multivariata con regressori uguali.....	241
31.- Applicazione.....	243
32.- Cenni sui modelli lineari generalizzati.....	246

CAPITOLO V - CORRELAZIONE CANONICA

1.- Premessa.....	247
2.- Il modello.....	248
3.- I coefficienti di correlazione canonica.....	250
4.- Sulle proprietà delle variabili canoniche \mathbf{V} e \mathbf{W}	252
5.- Problemi di stima nell'analisi delle correlazioni canoniche.....	253
6.- Significatività dei coefficienti di correlazione canonica.....	253
7.- Informazioni fornite dagli elementi tratti dalle correlazioni canoniche.....	254
7.1- <i>Informazioni fornite dalle componenti dei vettori \mathbf{a}_i e \mathbf{b}_i</i>	254
7.2- <i>Quota di varianza comune alle variabili originarie determinata dall'i.ma correlazione canonica</i>	254
7.3- <i>Correlazioni fra variabili originarie e componenti canoniche</i>	254
8.- Esempio.....	257

CAPITOLO VI - ANALISI MULTIVARIATA DELLA VARIANZA

1.- Premessa.....	261
2.- Analisi univariata della varianza ad un criterio di classificazione.....	262
3.- Applicazione.....	264
4.- Analisi multivariata della varianza ad un criterio di classificazione.....	265
5.- Applicazione.....	267
6.- Analisi univariata della varianza a due criteri di classificazione.....	269
7.- Applicazione.....	276
8.- Analisi multivariata della varianza a due criteri di classificazione.....	278
9.- Applicazione.....	281
10.- Altri test per l'analisi multivariata della varianza.....	283
10.1- <i>Il test di Wilks</i>	283
10.2- <i>Il test di Lawley ed Hotelling</i>	284
11.- Confronti.....	284
12.- Intervalli di confidenza simultanei.....	285

CAPITOLO VII - ANALISI MULTIVARIATA DELLA COVARIANZA

1.- Premessa.....	287
2.- Il modello nel caso univariato.....	289
2.1- <i>Modelli regressivi paralleli con intercette uguali</i>	290
2.2- <i>Modelli regressivi paralleli con intercette diverse</i>	290
2.3- <i>Modelli regressivi non paralleli con intercette uguali</i>	291
3.- Analisi univariata della covarianza.....	293
4.- Applicazione.....	296

5.- Il modello nel caso multivariato	300
5.1- <i>Modelli regressivi paralleli con intercette uguali</i>	300
5.2- <i>Modelli regressivi paralleli con intercette diverse</i>	301
5.3- <i>Modelli regressivi non paralleli con intercette diverse</i>	302
6.- Analisi multivariata della covarianza.....	303
7.- Applicazione.....	304

CAPITOLO VIII - ANALISI DELLE COMPONENTI PRINCIPALI

1.- Premessa.....	311
2.- La problematica dell'analisi delle componenti principali.....	312
3.- Determinazione delle componenti principali.....	315
4.- Alcuni criteri di scelta del numero di componenti principali.....	320
5.- L'impiego delle C.P. nella regressione multipla.....	322
6.- Esempio.....	323

CAPITOLO IX - ANALISI FATTORIALE

1.- La problematica dell' A.F.	327
2.- Il modello di analisi fattoriale.....	328
3.- La matrice su cui eseguire l'analisi.....	330
4.- Metodi di estrazione dei fattori.....	330
4.1- <i>Metodo delle componenti principali</i>	331
4.2- <i>Metodo dei fattori principali o metodo PAF (principal axes factoring)</i>	331
4.3- <i>Metodo dell'analisi fattoriale canonica</i>	332
4.4- <i>Metodo della massima verosimiglianza</i>	334
4.5- <i>Metodo dei minimi residui (minres)</i>	338
5.- Il numero di fattori comuni da estrarre e l'adeguatezza del modello.....	338
6.- L'identificazione dei fattori e i metodi di rotazione degli assi fattoriali.....	340
6.1- <i>Premessa</i>	340
6.2- <i>Generalità sulla rotazione di due assi fattoriali</i>	341
6.3- <i>Metodi di rotazione ortogonale più usati</i>	343
6.3.1- Metodo QUARTIMAX.....	343
6.3.2- Metodo VARIMAX.....	351
6.4- <i>Metodi di rotazione obliqua più usati</i>	352
6.4.1- Alcune relazioni preliminari	352
6.4.2- Metodo QUARTIMIN.....	355
6.4.3- Metodo COVARIMIN.....	357
6.4.4- Metodo BIQUARTIMIN.....	357
6.4.5- Metodo OBLIMIN.....	357
6.4.6- Oblimin diretto.....	358
7.- Punteggi fattoriali	359

CAPITOLO X - SCALING MULTIDIMENSIONALE

1.- Premessa.....	361
2.- Principali metodi di MDS.....	362

3.- Metodi metrici	363
4.- Metodi non metrici	368
5.- Applicazione	369
6.- Metodo metrico euclideo ponderato (o per differenze individuali)	371
7.- Applicazione	379
8.- Metodi di unfolding (o per dati di preferenza)	381
8.1- <i>Metodi con le coordinate degli stimoli noti</i>	382
8.1.1- Modello vettoriale	383
8.1.2- Modello euclideo semplice	383
8.1.3- Modello euclideo ponderato	384
8.1.4- Modello euclideo generale	385
8.2- <i>Metodi con le coordinate degli stimoli non noti</i>	389
8.2.1- Modello non metrico	389
8.2.2- Modello metrico	389

CAPITOLO XI - ANALISI DELLE CORRISPONDENZE

1.- Premessa	399
2.- Metodo di calcolo delle corrispondenze nel caso bivariato	403
3.- Identificazione della struttura di dipendenza fra due caratteri	407
3.1- <i>La rappresentazione grafica delle modalità dei due caratteri</i>	407
3.2- <i>L'inerzia</i>	413
3.3- <i>L'interpretazione dei risultati</i>	414
4.- Applicazione	416
5.- Un altro approccio al problema nel caso bivariato: il modello di Burt	421
6.- Relazione tra le soluzioni fornite dall'A.C. applicata ad una tabella di contingenza ed alla relativa tabella di Burt	426
7.- Analisi delle corrispondenze multiple	429
8.- Variabili supplementari	433
9.- Applicazione	434
10.- Conclusioni	438

CAPITOLO XII - ANALISI DISCRIMINANTE

1.- Premessa	439
2.- Metodo del minimo costo di un'errata classificazione	440
2.1- <i>Il caso di due popolazioni normali note con probabilità a priori note</i>	440
2.2- <i>Il caso di due popolazioni normali note con probabilità a priori non note</i>	443
2.3- <i>Il caso di due popolazioni normali di parametri non noti</i>	444
2.4- <i>Il caso di più di due popolazioni normali di parametri non noti</i>	445
3.- Metodo della minima distanza euclidea	445
4.- Metodo della minima distanza di Mahalanobis	446
5.- Metodo delle variabili canoniche	447
5.1- <i>La costruzione delle funzioni discriminanti lineari (variabili canoniche)</i>	447
5.2- <i>Il numero delle funzioni discriminanti lineari da calcolare</i>	448
5.3- <i>La regola di decisione</i>	449
6.- Applicazione	450

CAPITOLO XIII - ELEMENTI DI ANALISI DEI GRUPPI

1.- La problematica della "Cluster Analysis"	453
2.- La scelta delle variabili e delle mutabili	453
3.- La determinazione della matrice di somiglianza	454
4.- Le tecniche gerarchiche di raggruppamento	455
4.1- Metodo del centroide o del legame medio	456
4.2- Metodo della media di gruppo	459
4.3- Metodo del legame singolo	461
4.4- Metodo di Ward	462
5.- Criteri per determinare il numero ottimale dei gruppi nel caso di tecniche gerarchiche	463
6.- Tecniche non gerarchiche di raggruppamento	465
6.1- La partizione iniziale e il numero ottimale dei gruppi	466
6.1.1- Metodo basato sulla determinazione dei centroidi mediante la suddivisione del campo di variazione di ciascuna variabile	466
6.1.2- Metodo basato sulla determinazione dei centroidi mediante i quantili di ciascuna variabile	467
6.1.3- Metodo basato sulla migliore partizione ottenuta con tecniche gerarchiche	467
6.2- Gli algoritmi di raggruppamento	467
6.2.1- Metodi di raggruppamento in cui sia fissato k	467
6.2.2- Metodi di raggruppamento in cui non sia fissato k	469
7.- Cenni conclusivi	470

CAPITOLO XIV - ANALISI DELLE CLASSI LATENTI

1.- Premessa	471
2.- Il modello	472
3.- La soluzione del problema	474
4.- Applicazione	479

APPENDICE	485
Tav.1 - Aree α sottese alla curva normale standardizzata oltre z , ove $\alpha = P(Z \geq z)$	487
Tav.2 - Valori soglia $t_{g,\alpha}$ della distribuzione "T _g di Student" per vari valori di α	488
Tav.3 - Valori soglia $\chi_{g,\alpha}^2$ della distribuzione del χ_g^2	489
Tav.4 - Valori soglia $f_{g_1,g_2,\alpha}$ della distribuzione "F _{g₁,g₂} di Snedecor"	491
Tav.5 - Valori soglia $d_{n,\alpha}$ del test D_n di Kolmogorov	495
Tav.6 - Numeri casuali normali standardizzati	496
Tav.7 - Limiti inferiori d_L e superiori d_U dei valori soglia del test di Durbin-Watson	497
Tav.8 - Valori soglia d_α^* approssimati da Theil-Nagar del test di Durbin-Watson	499
CARTE DI HECK	500

BIBLIOGRAFIA CONSULTATA	513
--------------------------------------	-----

INDICE ANALITICO	519
-------------------------------	-----